2021 秋数学分析 B1 第 7 次习题课讲义

宗语轩[1]

西江月 · 证明

即得易见平凡，仿照上例显然。
留作习题答案略，读者自证不难。
反之亦然同理，推论自然成立。
略去过程 QED，由上可知证毕。

---

1 第 12, 13 次作业习题的延伸

注. 第 12, 13 次作业参考答案已放在群文件中.

1. **(综合习题 5 T13 的推广: Riemann—Lebesgue 引理)**. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证明. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 其中 $w_k(f)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅. 记 M 是 $|f(x)|$ 的一个上界, 当 $\lambda>\dfrac{4nM}{\varepsilon}$ 时, 有

[1]就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系. 讲义如有错误欢迎联系我:zyx240014@mail.ustc.edu.cn. 我的个人主页:http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k)+f(x_k))\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k+M\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos\lambda x_{k+1}-\cos\lambda x_k}{\lambda}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k+\frac{2Mn}{\lambda} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$. 同理可证: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$. ∎

2. (习题 7.1.4 的推广) 原题: 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 问: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 是否成立?

a. 逆命题不成立. 反例: $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$

b. 在题目中加一个条件" 正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0", 则命题成立.

$0<2na_{2n}\leqslant 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k<2\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$. 同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$. 综上, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

3. (习题 7.1.5 的推广) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 问: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是否一定收敛?

解. 不一定. 反例: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 有界且 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\downarrow 0$, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 收敛. 由 $\cos^3\dfrac{2n\pi}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos^3\dfrac{2n\pi}{3}$ 发散. ∎

4. (习题 7.1.12(10)) 对非正项级数证明收敛时, 没有比较判别法及其极限形式. 故只用 $\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^p\sim\dfrac{1}{2^pn^{2p}}$ 条件是推不出条件收敛的.

反例: $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

2 判断与命题推断

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

1. 存在具有原函数的非连续函数.

2. 黎曼函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积.

3. $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $g(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 中 $\Rightarrow f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上一定可积.

4. $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积 $\Rightarrow f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积.

5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

6. Leibniz 判别法中, 去掉" 数列 $\{a_n\}$ 单调递减" 的条件, 结论仍成立.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛.

8*. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

另外一些命题或推断放在第三部分详细讲解

参考答案:

1. 正确. 非连续函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 具有原函数 $F(x)$. 取 $F(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x t^2\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}(x^2\cos\frac{1}{x^2}\Big|_\varepsilon^x-\int_\varepsilon^x 2t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t)\\&\overset{\text{连续性}}{=}x^2\cos\frac{1}{x^2}-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

经验证, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

2. 正确. 记 $f(x)=R(x)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1,\delta=\dfrac{\varepsilon}{2N^2}$. 只需证: 对任意在 $[a,b]$ 上的分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $||T||<\delta$ 及 $\forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\varepsilon$. 将和式分成如下两部分:

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k$$

其中 $\sum\limits_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k$ 表示对小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 包含了 $x=0$ 及 $x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,n<N$ 的求和, $\sum\limits_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k$ 表示其余求和部分. 我们有

$$\begin{aligned}|\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k|&\leqslant\sum_{(1)}|f(\xi_k)||\Delta x_k|\leqslant\sum_{(1)}|\Delta x_k|\\&<\sum_{k=1}^{N-1}k\delta=\left(\frac{N(N-1)}{2}+1\right)\delta\\&<N^2\delta=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

及

$$\begin{aligned}|\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k|&\leqslant\sum_{(2)}|f(\xi_k)||\Delta x_k|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{(2)}|\Delta x_k|\\&<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{2}$$

由 (1)、(2) 得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant\left|\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k\right|+\left|\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

3. 错误. 反例: $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\1, & x\neq0\end{cases}$, $g(x)=R(x)$. 则 $f(g(x))=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$.
$f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积但 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

4. 错误. 反例: $f(x)=D(x)$, $g(x)=-D(x)$. 则 $f(g(x))\equiv1$.
$f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积但 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上可积.

5. $\Rightarrow$. 对分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 记 $w_k(f)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅, $w'_k(f)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅. 利用 $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$ 可知 $w'_k = \sup\limits_{x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant \sup\limits_{x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x_1) - f(x_2)| = w_k$.

$\Leftarrow\!\!\!\!/$. 反例:$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q} \\ -1, \ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$.

6. 错误. 反例: $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2}, \ n = 2k-1 \\ \\ \dfrac{1}{k}, \quad n = 2k \end{cases}$.

7. $\Rightarrow$. Cauchy 收敛准则.

$\Leftarrow\!\!\!\!/$. 反例:$a_n = (-1)^n$.

8. 正确. 设 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 令 $b_n = \sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, S_0 = 0$. 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(S - S_{n-1}) - (S - S_n)}{\sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}} \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{S - S_{n-1}} + \sqrt{S - S_n}) = 0 \end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{S} - \sqrt{S - S_n}) = \sqrt{S}$$

---

3 课内复习与延伸

3.1 原函数 & 可积函数

联系

1. 微积分基本定理 (Newton—Leibniz 公式)

- 一个函数的原函数可以通过变上限积分来表示.
- 函数可导下, 一个函数的导数积分可以还原到函数自身.

2. 闭区间上的连续函数一定可积, 且一定存在原函数.

独立性: 两者无包含关系

- $f(x)=\begin{cases}1,\ x=0\\ 0,\ x\in[-1,1]\backslash\{0\}\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上可积, 但没有原函数 **(Darboux 定理)**.
- $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0\\ 0, \qquad\qquad x=0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0\\ 0, \qquad\qquad x=0\end{cases}$. $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可积 **(无界)**.

3.2 两个积分不等式

1. Cauchy-Schwarz 不等式

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

证明. 考虑 $\phi(t)=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot t^2+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot t+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$. 则 $\phi(t)$ 为二次函数, 且 $\phi(t)=\int_a^b (f(x)t+g(x))^2\mathrm{d}x\geqslant 0$. 所以 $\Delta\leqslant 0$, 即

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 0$$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立. ∎

例 1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a)=0$. 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

证明. 由 Newton-Leibniz 公式, 得

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$f^2(x) \leqslant (x-a)\int_a^x (f'(t))^2 \mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b (f'(t))^2 \mathrm{d}t.$$

对两边从 a 到 b 积分, 得

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b (f'(t))^2 \mathrm{d}t.$$

∎

例 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $m, M > 0$, 使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 对 $\forall x \in [0,1]$ 成立. 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证明. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1.$$

故左边不等式成立. 又因为

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{mf(x)} \leqslant 0.$$

即

$$\frac{M}{f(x)} + \frac{f(x)}{m} \leqslant \frac{M}{m} + 1.$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x &= \frac{m}{M}\int_0^1 \frac{f(x)}{m}\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{M}{f(x)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{m}{4M}\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{m}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{M}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \frac{m}{4M}\left(\int_0^1 \left(\frac{M}{m}+1\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{(m+M)^2}{4mM}
\end{aligned}$$

故右边不等式成立. ∎

2. Gronwall 不等式

设 $u(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 并满足: 对 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $u(x)\leqslant A+\displaystyle\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t$, 其中 $A\geqslant 0$, $B(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 证明:

$$u(x)\leqslant A\mathrm{e}^{\int_a^x B(t)\mathrm{d}t}.$$

证明. 由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)=B(x)u(x)\leqslant B(x)\left(A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant B(x)$$

对两边从 a 到 x 积分, 得

$$\ln\left(A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)\Bigg|_a^x\leqslant\int_a^x B(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\ln\left(A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)-\ln A\leqslant\int_a^x B(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$u(x)\leqslant A+\int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\leqslant A\mathrm{e}^{\int_a^x B(t)\mathrm{d}t}$$

故 Gronwall 不等式成立. ∎

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$|f(x)|\leqslant\mathrm{e}^{kx}+k\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t.$$

其中 k 是常数. 证明: $|f(x)|\leqslant(kx+1)\mathrm{e}^{kx}$.

证明. 由题意得:$\left(\mathrm{e}^{-kx}\displaystyle\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t\right)'\leqslant 1$. 设 $g(x)=\mathrm{e}^{-kx}\displaystyle\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t-x$, 则 $g(0)=0$ 且 $g(x)$ 单调递减. 故 $g(x)\leqslant 0$, 即 $\displaystyle\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant x\mathrm{e}^{kx}$. 所以 $|f(x)|\leqslant(kx+1)\mathrm{e}^{kx}$. ∎

Gronwall 不等式常被用于估计微分方程的解的取值范围，且可以用于证明初值问题的解的唯一性.

3.3 Raabe 判别法

注: 我们这里仅考虑其极限形式. 一般形式的证明请读者自证.

- 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$$

则当 $l>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $l<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $l=1$ 时, 无法判断.

证明. 1. 当 $l>1$ 时, $\exists p\in(1,l)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l>p=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right).$$

故 $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right),$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{(n+1)^p}{n^p}\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ 收敛, 由教材习题 **7.1.14**, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 当 $l<1$ 时, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1,$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{(n+1)^{-1}}{n^{-1}}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3. 当 $l=1$ 时，由

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

得

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}$$

∎

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$. 由 Cauchy 积分判别法知, 当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散. 但

$$\begin{aligned}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}-1\right)\\ &= 1+\frac{\alpha}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} 1.\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性无法判断.

例. 设 $p, q > 0$. 当 p, q 取何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\dfrac{1}{n^q}$ 收敛?

解. 因为

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} = \left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+p}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{q+1-p}{n}++o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由 Raabe 判别法知, $q > p$ 时级数收敛; $q < p$ 时级数发散; $q = p$ 时无法判断. ∎

3.4 函数项级数中的 绝对收敛 & 一致收敛

- **绝对收敛**本身是数项级数的概念, 但在函数项级数中, 将收敛域中的某个值代入后, 则此函数项级数转化为数项级数.

- **一致收敛**是函数项级数中独有的概念. 与逐点收敛相比, 一致收敛多了"一致"的性质. 在数学语言中用 $\sup\limits_{x\in I}$ 中体现. 直观上讲, 逐点收敛强调**局部**, 一致收敛强调**整体**.

联系

1. **(Weierstrass 判别法)** 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且在区间 I 上恒有 $|u_n(x)| \leqslant a_n$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对收敛.

2. 设 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 绝对收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对收敛且一致收敛.

证明. 令 $k_n = \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\}$. 由 $0 \leqslant k_n \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)|$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n$ 收敛. 因为 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调, 所以 $|u_n(x)| \leqslant k_n$. 由比较判别法及 Weierstrass 判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对收敛且一致收敛. ∎

独立性: 两者无包含关系

- $u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛但不绝对收敛.
- $u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收敛但不一致收敛.

例. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛.

证明. 记 $f_n(x) = x^n(1-x), f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$. 则 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是 $f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 对 $\forall x \in [0,1]$,$\{f_n(x)\}$ 单调递减. 因为 $f_n(x) \geqslant 0$, 故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致趋于 0. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和 $[0,1]$ 上一致

有界, 由 Dirichlet 判别法知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

而 $S(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = \begin{cases} 0, & x=1 \\ (1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1, & x\in[0,1) \end{cases}$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛.

又因为 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续, 且 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. ∎

3.5 补充习题

1. **(反函数积分)** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数且有反函数. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

解. $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int x\mathrm{d}f^{-1}(x) \overset{y=f^{-1}(x)}{=} yf(y) - \int f(y)\mathrm{d}y = yf(y) - F(y) + C = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$. ∎

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导, $|f'(x)| \leqslant M$. 若 $\exists a \in (0,1)$, 使得 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M(1-a^2).$$

证明. 由 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 知, $\exists \eta \in (-a,a)$, 使得 $f(\eta)=0$. 由 $|f(x)| = |f(x)-f(\eta)| \leqslant M|x-\eta|$, 得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_{-1}^{-a} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{a}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{-a} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{a}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_{-1}^{-a} (\eta - x)\mathrm{d}x + M\int_{a}^{1} (x-\eta)\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{2}\left((\eta+1)^2 - (\eta+a)^2 + (1-\eta)^2 - (a-\eta)^2\right) \\
&= M(1-a^2)
\end{aligned}$$

∎

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

证明. 令 $t=\dfrac{x}{h},k=\dfrac{1}{h}$. 即证:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t=\pi f(0).$$

由题意知, $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$. 对 $\forall 0<\varepsilon<M,\exists\delta>0$ 及 $X_0=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{8M}\right)$, 当 $|x|<\delta$ 时, $|f(x)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{4\pi}$. 当 $x>X_0$ 时, 有

$$\left|\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\frac{\pi}{2}-\arctan X_0=\frac{\varepsilon}{8M}.$$

取 $k>\max\left\{\dfrac{X_0}{\delta},X_0\right\}$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t-\pi f(0)\right| &\leqslant\left|\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}(f(\frac{t}{k})-f(0))\mathrm{d}t-2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}f(0)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}\left|f(\frac{t}{k})-f(0)\right|\mathrm{d}t+2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\left|f(0)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant\left(\int_{-X_0}^{X_0}+\int_{-k}^{X_0}+\int_{X_0}^{k}\right)\frac{1}{t^2+1}\left|f(\frac{t}{k})-f(0)\right|\mathrm{d}t\\ &+2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\left|f(0)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant\int_{-X_0}^{X_0}\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{k}\frac{2M}{t^2+1}\mathrm{d}t+2\int_{k}^{+\infty}\frac{M}{t^2+1}\mathrm{d}t\\ &<\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{+\infty}\frac{2M}{t^2+1}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{+\infty}\frac{M}{t^2+1}\mathrm{d}t\\ &<\frac{\varepsilon}{4}+6M\cdot\frac{\varepsilon}{8M}<\varepsilon\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t=\pi f(0).$$

得证. ∎

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=0$, 且当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)\neq 0$. 证明:

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4.$$

证明. 不妨 $f(x)>0, x\in(0,1)$. 记 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=f(x_0), x_0\in(0,1)$. 由 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x_0)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x_0, 0<\xi<x_0;$$
$$f(x_0)=f(x_0)-f(1)=f'(\eta)(x_0-1), x_0<\eta<1.$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x&\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_\xi^\eta|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{f(x_0)}|f'(\eta)-f'(\xi)|\\&=\frac{1}{f(x_0)}\left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4.\end{aligned}$$

∎

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 发散, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}=0$, 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

证明. 记 $S_N=\sum\limits_{k=1}^n a_k$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{S_n}=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=1$. 故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty S_nx^n$ 的收敛半径是 1. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^\infty S_nx^n\geqslant\sum\limits_{n=1}^\infty a_nx^n$, 由比较判别法知 $R\geqslant 1$. 又由 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 发散知 $R\leqslant 1$. 故 $R=1$. ∎

变式. 现把题目条件中的“$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}=0$”变成“$\{a_n\}$ 有界”, 试证明原结论.

提示. 设 $|a_n|\leqslant M$, 则当 $x\in(-1,1)$ 时, 有 $\left|\sum\limits_{n=1}^\infty a_nx^n\right|\leqslant M\sum\limits_{n=1}^\infty|x|^n<+\infty$.

6. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证明. 因为

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k} > \int_{n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{x} = \ln\frac{(n+1)^2}{n^2} > \ln\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1} = \int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1}\frac{1}{x} > \sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1}\frac{1}{k},$$

由 Leibniz 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}$ 收敛. 又因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{n=1}^{[\sqrt{N}]-1}(-1)^n\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k} + (-1)^{[\sqrt{N}]}\sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k},$$

且

$$0 < \sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k} < \int_{[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k} = \ln\frac{N}{[\sqrt{N}]^2} < \ln\frac{N}{(\sqrt{N}-1)^2} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

由夹逼原理知, $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k} = 0$. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

∎

7. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明. 当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x} < +\infty$,
由 Weierstrass 判别法知该级数在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛. 对任意固定的 $x\in[\frac{1}{2},1]$, 有

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n+1}} < \frac{x^{n+1}}{x+x^2+\cdots+x^{2n}} = \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}.$$

以及

$$0<\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n} < \frac{x^n}{(n+1)x^n} = \frac{1}{n+1}\downarrow 0.$$

由 Weierstrass 判别法知 $\left\{\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\right\}$ 一致收敛于 0.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致有界, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致收敛. 综上, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. ∎

8. 若正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$, 证明: $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

证明. 易知 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0$. 由 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ 得 $\lim_{n\to\infty}\ln n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda$. 因为 $0<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n<\frac{1}{n}\ln n\xrightarrow{n\to\infty}0$, 故有

$$\ln\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{\lambda}{\ln n}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=+\infty$. 故 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$ ∎

---

4 课后思考

4.1 $x^\alpha\sin x^\beta$ 型函数积分性质探究

注: 我们在第 **2** 部分 **T1** 中已证明函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 具有原函数.

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

1. 求: 当且仅当 α, β 取何值时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积?
(注: 此处的可积是指有通常意义的积分, 不包含反常积分).

2. 求: 当且仅当 α, β 取何值时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有原函数?

4.2 Sapagof 判别法

1. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 证明: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

2. Sapagof 判别法的等价形式:

A. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 证明: $\{a_n\}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散.

B. 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

3. 用 Sapagof 判别法求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$.

4.3* 两个函数项级数的研究

注: 此处需要用到反常积分的性质.

我们用级数定义函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}},\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}.$$

1. 证明: $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是良好定义的 (即上面的级数是收敛的), 并且都是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

2. 证明: 对 $\forall x\in(0,+\infty)$, 有

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

3. 证明: 存在常数 C_0, 使得 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f(x)=C_0$ 成立.

4. 定义数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

5. 对 $\forall x\in I$, 由级数定义的函数

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$$

是良好定义的.

6. 试用 $f(x)$ 来表示 $h(x)$, 并证明: 存在常数 C_1, 使得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}h(x)=C_1$ 成立.

7. 证明: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}g(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$